

Stabilité de l'écoulement de deux fluides viscoélastiques

N. MEHIDI^a, N. AMATOUSSE^a A. BADHOUCHE^b

a. Université A.Mira Laboratoire de Physique Théorique, Département de Physique, route de Targa Ouzemour, 06000 BEJAIA (ALGERIE)

b. Université A.Mira, Département de Mathématiques, route de Targa Ouzemour, 06000 BEJAIA (ALGERIE)

Résumé :

Nous présentons une étude de stabilité linéaire de deux fluides d'Oldroyd-B viscoélastiques s'écoulant par gravité dans un canal incliné. Un modèle simplifié basé sur une méthode aux résidus pondérés et aux grandes longueurs d'ondes est développé. Ceci a permis de ramener le problème à un système de deux équations couplées, décrivant l'évolution de l'interface $h(x,t)$ et du débit local $q(x,t)$. Le modèle permet de prédire le seuil de l'instabilité de façon précise. Nous montrons que les paramètres pertinents qui permettent de contrôler l'interface sont le rapport de viscosité et les paramètres viscoélastiques.

Abstract :

The linear stability of the Oldroyd-B viscoelastic two fluids on inclined channel is examined. A simplified model is derived by using a weighted residual method combined with a long-wavelength expansion. A set of two coupled evolution equation for two fields, the film thickness $h(x,t)$ and the flow rate $q(x,t)$ is obtained. Then, the correct threshold of instability of the interface is characterized analytically. We show that the relevant parameters that control the interface are viscosity ratio and viscoelastic parameters.

Mots clefs : **Instabilité, fluides viscoélastiques, écoulements dans un canal.**

1 Introduction

Les fluides viscoélastiques sont rencontrés dans de nombreux domaines industriels. Des instabilités liées à la stratification de la viscosité et à une différence d'élasticité se développent à l'interface. Cela a conduit à de nombreuses études sur la stabilité de l'écoulement constitué d'une ou plusieurs couches. Ce genre d'études à principalement fait l'objet d'études expérimentales ou numériques. Notant que très peu de travaux théoriques ont été consacrés à la stabilité des écoulements de fluides non Newtoniens. Nous proposons dans ce travail, un modèle théorique décrivant l'écoulement par gravité de deux couches fluides viscoélastiques dans un canal. Ce travail, fait suite à une étude que nous avons menée récemment dans le cas de l'écoulement d'une seule couche de fluide viscoélastique [1] et à celle de deux couches de fluides Newtoniens [2]. La méthode utilisée est basée sur celle développée par Ruyer Quil et Maneville [3] dans le cas d'un écoulement visqueux sur un plan incliné et pour un fluide Newtonien. Elle améliore l'approche intégrale couche limite [4] en combinant un développement en gradient du profil de vitesse avec une méthode aux résidus pondérés. Cette méthode conduit à l'élaboration d'un système d'équations différentielles simplifiées décrivant l'évolution spatio-temporelle de l'interface et du débit local appelé modèle. Un modèle simplifié de deux équations a été sélectionné en fonction de ses propriétés de stabilité linéaire, pour une gamme de paramètre la plus large.

2 Formulation du problème

On considère l'écoulement plan sous l'effet de la gravité de deux fluides viscoélastiques de vitesses $\mathbf{v}_k(u_k, v_k)$ avec $k = 1$ ou 2 selon le fluide considéré. Les fluides sont non miscibles et incompressibles de viscosités dynamiques μ_1 et μ_2 et de densités ρ_1 et ρ_2 , disposés en couches infinies d'épaisseurs d_1 et d_2 . (figure 1). La position de l'interface est définie par la fonction $h(x, z, t)$ et fait partie des inconnus du problème.

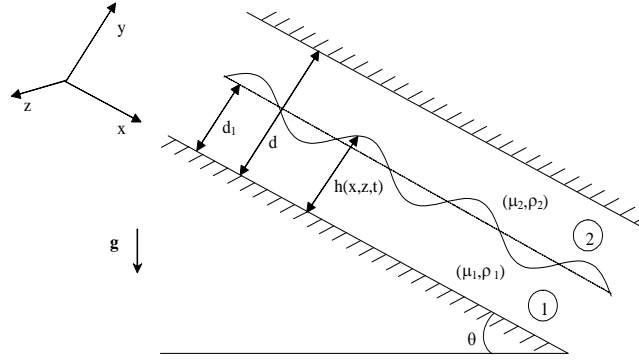


FIG. 1 – Configuration étudiée : Ecoulement de deux couches de fluides dans un canal.

Les deux fluides obéissent à une loi de comportement de type Walters B'' :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 2\Gamma_0 \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} e_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} e_{kj} \right) \quad (1)$$

$\bar{\tau}$ est le tenseur des contraintes et \bar{e} celui des déformations. Γ_0 est le temps caractéristique et p la pression. Les équations régissant le mouvement sont les équations de Navier Stokes :

$$\rho_k \left(\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla \mathbf{v}_k \right) = \text{div} \bar{\tau}_k + \rho_k \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0 \quad (3)$$

\mathbf{g} étant l'accélération de la pesanteur.

Les conditions aux bords satisfont les hypothèses de non glissement à la paroi qui s'écrivent :

$$u_1 = v_1 = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (4)$$

$$u_2 = v_2 = 0 \quad \text{en } y = d \quad (5)$$

La vitesse normale au plan \mathbf{v}_k en tout point de l'interface est reliée à la fonction $h(x, t)$ par la condition cinématique :

$$v_k = h_t + u_k h_x \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (6)$$

A l'interface la continuité des vitesses tangentielles, assurée par la viscosité, s'écrit :

$$[\mathbf{v}] = 0 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (7)$$

La continuité de la contrainte tangentielle et le saut de la contrainte normale dû à la tension de surface σ s'écrivent :

$$[\mathbf{t}(\bar{\tau}\mathbf{n})] = 0 \quad (8)$$

$$[\mathbf{n}(\bar{\tau}\mathbf{n})] = \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (9)$$

\mathbf{t} et \mathbf{n} représentent la normale et la tangente à l'interface respectivement.

2.1 Le modèle

La mise sous forme adimensionnelle du système (2)-(9) est obtenue à l'aide des variables adimensionnelles suivantes : $u^* = u/U_m$, $x^* = x/\lambda$, $v^* = v\lambda/d U_m$, $t^* = tU_m/\lambda$, $p^* = pd^2/U_m\lambda\mathbb{E}_1$ où λ est la longueur d'onde dans la direction de l'écoulement, $U_m = Q_0/d$, la vitesse moyenne et Q_0 représente le débit local. Pour tenir compte de l'hypothèse de grandes longueurs d'onde, on introduit un paramètre $\varepsilon = d/\lambda$. Les groupements adimensionnels suivants apparaissent : le nombre de Reynolds, le nombre de Weber, et les paramètres viscoélastiques ainsi que les rapports des viscosités et des densités des deux fluides.

$$R = Q_0\rho_1/\mu_1, W = \sigma/\mu_1 U_m, \Gamma_1 = \Gamma_0/\rho_1 d, \Gamma_2 = \Gamma_0/\rho_2 d, \mu = \mu_2/\mu_1, \rho = \rho_2/\rho_1, d = d_2/d_1$$

Dans la suite, l'élaboration du modèle repose sur une technique qui combine une méthode aux résidus pondérés à un développement en gradient des profils de vitesse. Pour ce faire, le champ de vitesse de chacun des fluides est projeté sur un ensemble de fonctions tests indépendantes.

$$u_1(x, y, t) = \sum_{j=0}^J a_j(x, t) f_j(y), \quad u_2(x, y, t) = \sum_{j=0}^J b_j(x, t) \tilde{f}_j(y) \quad (10)$$

$$f_j(y) = \left(\frac{y}{h(x, t)}\right)^{j+1} - \frac{j+1}{j+2} \left(\frac{y}{h(x, t)}\right)^{j+2}$$

Tel que les fonctions tests f_j représentent une base d'approximation de polynômes orthogonaux.

Suivant la démarche développée par Ruyer-Quil et Manneville [3] dans le cas des films liquides tombants et étendue au cas de deux couches de fluides Newtoniens avec interface dans le cas plan [2], les champs de vitesse peuvent être écrits comme :

$$u_k(x, y, t) = u_k^{(0)} + \varepsilon u_k^{(1)} + \varepsilon^2 u_k^{(2)} + O(\varepsilon^3) \quad (11)$$

Lorsque le film est uniforme, degré zéro, seul le profil parabolique des deux fluides apparaît $u_1^{(0)}$ et $u_2^{(0)}$, les coefficients d'ordre ε et plus apparaissent avec la modulation de la hauteur de l'interface.

L'élimination de la pression des équations de Navier Stokes adimensionnées nous donne les équations de couches limites relatives au problème considéré.

$$-R\varepsilon \frac{Du_1}{Dt} + u_{1yy} - \mu u_{2yy} \Big|_{y=1} + (1-\rho)G\{1 - \varepsilon \cot\theta h_x\} + W\varepsilon^3 h_{xxx} + \varepsilon^2 \{2u_{1xx} + (u_{1x}|_h - \mu u_{2x}|_h)_x\} - \\ \Gamma_1 R\varepsilon (u_{1yyt} + u_1 u_{1yyx} + v_1 u_{1yy} - u_{1y} u_{1xy} - v_{1y} u_{1yy}) + \Gamma_2 R\varepsilon \{(u_{2yyt} - u_{2y} u_{2xy}) \Big|_{y=1}\} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& -R\rho\varepsilon \frac{Du_2}{Dt} + \mu \left(u_{2yy} - u_{2yy}|_{y=1} + 2\varepsilon^2 u_{2xx} \right) + \Gamma_2 R\varepsilon \left\{ (u_{2yyt} - u_{2y}u_{2xy})|_{y=1} \right\} \\
& - \Gamma_2 R\varepsilon (u_{2yyt} + u_2 u_{2yyx} + v_2 u_{2yyy} - u_{2y}u_{2xy} - v_{2y}u_{2yy}) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\text{Où } G = \frac{g\rho_1 \sin\theta}{\mu_1} d_1^3 \left(1 + \frac{d_2}{d_1}\right)^3 / Q_0 \text{ et } Q_0 = \frac{g\rho_1 \sin\theta}{4\mu_1} d_1^3 \left\{ \frac{d_2}{d_1} \frac{1+\rho \frac{d_2}{d_1}}{\frac{d_2}{d_1} + \mu} / \left(1 + \frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 \frac{\rho}{\mu}\right) \right\}$$

La généralisation du modèle aux résidus pondérés aux cas de deux fluides est rendue possible grâce à un choix judicieux des fonctions de pondération. La méthode utilisée est celle de Galerkin, elle réalise l'élimination des champs de vitesse d'ordre ε en tirant profit de l'orthogonalité de la base choisie. Par ce choix, nous avons pu obtenir un modèle cohérent à l'ordre un, sans avoir à expliciter les corrections $u_k^{(1)}$ des profils de vitesses. Le modèle ainsi obtenu est un système de deux équations différentielles pour l'épaisseur $h(x, t)$ et le débit local $q(x, t)$.

2.2 Analyse de la stabilité linéaire

Afin de déterminer l'influence des nombreux paramètres de l'étude sur l'évolution des petites perturbations, une linéarisation des deux équations du mouvement précédentes (12) et (13) autour de l'état d'équilibre est réalisée. On regarde la stabilité temporelle de l'écoulement par rapport aux perturbations périodiques dans la direction de l'écoulement. En termes de modes normaux, la perturbation peut être écrite sous la forme :

$$(h, q) = (A, B)e^{i(kx - \omega t)} \tag{14}$$

où k est le nombre d'onde et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est le taux d'amplification complexe de l'onde. On aboutit alors à une relation de dispersion qu'on peut formellement écrire sous la forme suivante :

$$D(k, \omega, d, \rho, \mu, R, \Gamma_1, \Gamma_2, \cot\theta) = 0 \tag{15}$$

2.3 Résultats et discussion

A la criticalité, les résultats du modèle sont exactement ceux donnés par le développement asymptotique aux grandes ondes, quelque soit la gamme des paramètres considérés. La figure 2 représente l'évolution du Reynolds critique R_c en fonction du rapport des viscosités μ pour différentes valeurs de l'épaisseur des couches de fluides. Elle montre que l'interface peut être instable même lorsque les viscosités sont égales pour des fluides ayant des paramètres viscoélastiques différents. Lorsque $\mu = 1$, la présence d'une différence d'élasticité entre les deux fluides est alors la seule cause de l'instabilité de l'écoulement. De plus lorsque le fluide le moins élastique occupe plus de la moitié de la conduite, la différence d'élasticité est déstabilisante et se rajoute à l'effet de la viscosité, ce résultat a été obtenu par Su et Khomami [5].

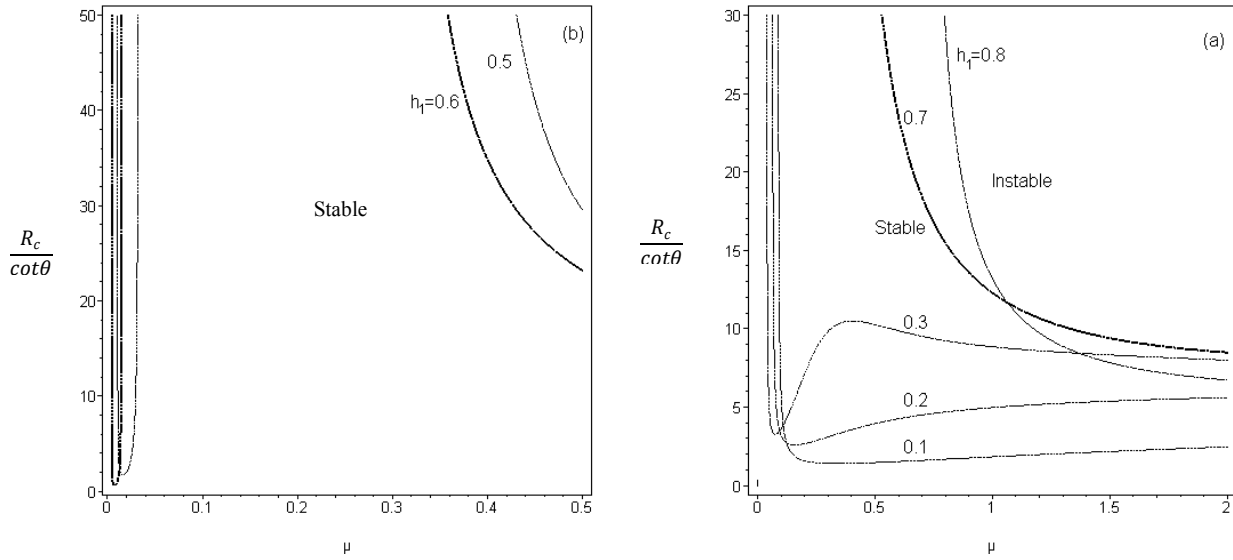


FIG. 2 – Nombre de Reynolds critique R_c en fonction de μ pour différentes valeurs de l'épaisseur h_1 :

$$\Gamma_1 = 0.01, \Gamma_2 = 0.05 \text{ et } \rho = 0.1$$

On représente figure 3 le taux d'amplification en fonction du nombre d'onde, on constate que lorsque l'écoulement est instable la viscoélasticité accentue l'instabilité du mode le plus instable. L'influence d'une différence de densité agit dans le même sens. Par ailleurs, pour des valeurs de $\mu < 0.1$ (figure 2 (b)) deux types d'instabilité d'interface sont mises en évidence une de grande longueur d'onde et l'autre est qualifiée d'onde courte qu'on peut observer sur la figure 4.

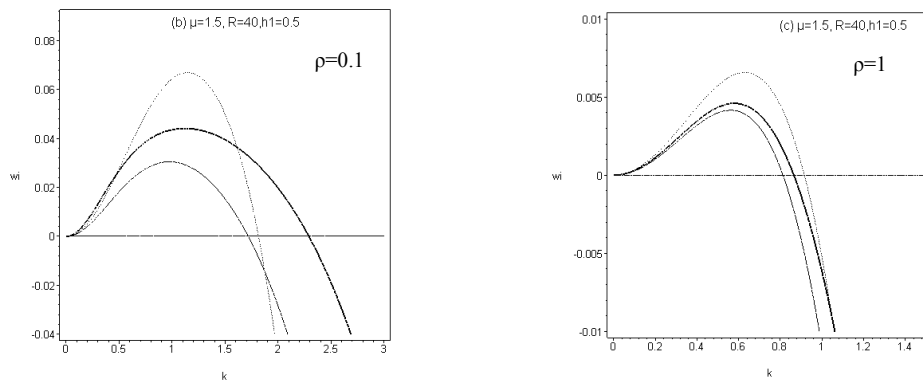


FIG. 3– Taux d'amplification en fonction du nombre d'onde k de la perturbation, l'angle d'inclinaison $\theta=30$

$$(-)\Gamma_1 = 0.01, \Gamma_2 = 0.04; (—)\Gamma_1 = 0.01, \Gamma_2 = 0.05; (\dots)\Gamma_1 = 0.04, \Gamma_2 = 0.04$$

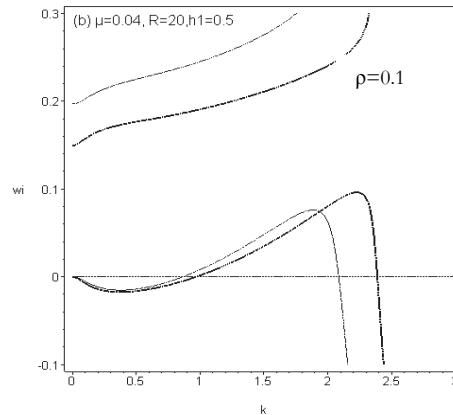


FIG. 4– Taux d’amplification en fonction du nombre d’onde k de la perturbation, l’angle d’inclinaison $\theta=30$

$$(-)F_1 = 0.01, F_2 = 0.04; (—)F_1 = 0.01, F_2 = 0.05$$

3 Conclusion

Une étude de stabilité de deux couches de fluides viscoélastiques en écoulement dans un canal incliné a été réalisée. Le modèle développé est validé par une étude asymptotique et aussi par une comparaison des courbes de stabilité marginale obtenues dans le cas de fluides Newtoniens [2]. L’étude montre clairement le caractère déstabilisant de l’élasticité. Un autre résultat intéressant est la mise en évidence de deux modes instables à l’interface. Enfin, la disponibilité d’une relation de dispersion analytique nous permet de déterminer de façon précise le seuil de l’instabilité, ainsi que l’influence des nombreux paramètres du problème sur les zones stables et instables de l’écoulement loin du seuil.

References

- [1] Amatoousse N., Ait abderrahmane H., Mehidi N., Traveling waves on a falling weakly viscoelastic fluid film, IJES, 54, 27-41, 2012.
- [2] Amaouche M., Mehidi N., Amatoousse N., Linear stability of two-layer film flow an inclined channel: A second order weighted residual approach, Phys. Fluids, 19, 0841106, 2007.
- [3] Ruyer-Quil C., & Manneville P., Improved modeling of flows inclined planes, Eur. Phys. J.B., 15, 357-369, 2002
- [4] Shkadov, V. Ya., Linear Theory of wave flow of thin layer of viscous liquid, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Mekh. Zhidk. Gaza, 2, 20, 1968.
- [5] Su, Y. & Khomami, B., I., purely elastic interfacial instabilities in superposed flow of polymeric liquids. Rheol. Acta, 31, 413, 1992.